Inégalité de Le Cam | Leçons: 262, 264

Lemme: Soit X, Y deux v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\forall A \subset \mathbb{N},\quad |P(X\in A) - P(Y\in A)| \leq P(X\neq Y)$$

Preuve: Soit $A\subset\mathbb{N}$ on a

$$P(X\in A) = P(X\in A \cap X\neq Y) + P(X\in A\cap X=Y) \leq P(X\neq Y) + P(Y\in A)$$

D'où $\quad P(X\in A) - P(Y\in A) \leq P(X\neq Y)$

On fait de même avec Y pour trouver $P(Y\in A) \leq P(X\neq Y) + P(X\in A)$

D'où $\quad |P(X\in A) - P(Y\in A)| \leq P(X\neq Y)$

$\square$

Théorème:
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tq $0<2\lambda<n$ alors si $X\sim\mathcal{B}(n,\frac{\lambda}{n})$ et $Y\sim\mathcal{P}(\lambda)$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k) - P(Y=k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n}$$

Preuve:
On note $p=\frac{\lambda}{n}$ et on définit la loi m_p sur $\mathbb{N}\times\{0,1\}$ par

$$P(X=0, Y=0) = e^{-p} - p(1-e^{-p})$$
$$P(X=0, Y=1) = p(1-e^{-p})$$
$$P(X=1, Y=0) = 0$$
$$P(X=1, Y=1) = pe^{-p}$$

$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $P(X=k, Y=1) = 0$

$$P(X=k, Y=0) = \frac{p^k}{k!}e^{-p}$$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k,Y=0) + P(X=k,Y=1) = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + p(1-e^{-p}) + pe^{-p} + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{p^k e^{-p}}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{p^k e^{-p}}{k!} = 1$$

Donc la loi m_p est bien définie

De plus si $(X,Y)\sim m_p$ alors $X\sim\mathcal{P}(p)$ et $Y\sim\mathcal{B}(1,p)$ (*)

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ n couples de variables aléatoires indépendants identiquement distribuées suivant la loi m_p.

Alors ~~X~~ $X = X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(np) = \mathcal{P}(\lambda)$

$Y = Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$

Soit $A = \{k \in \mathbb{N}, P(X=k) \geq P(Y=k)\}$

Alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k) - P(Y=k)| = \sum_{k \in A}^{+\infty} |P(X=k) - P(Y=k)| + \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus A} |P(X=k) - P(Y=k)|$$

D'après lemme

$$= P(X \in A) - P(Y \in A) - P(X \in \mathbb{N} \setminus A) + P(Y \in \mathbb{N} \setminus A)$$

$$\leq 2 P(X \neq Y)$$

$$\leq 2 P(\exists i \in [\![1, n]\!], X_i \neq Y_i)$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{n} P(X_i \neq Y_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} 1 - P(X_i = Y_i) = 2n - 2 \sum_{i=1}^{n} P(X_i = Y_i)$$

$$\leq 2n - 2 \sum_{i=1}^{n} P(X_i = Y_i = 0) + P(X_i = Y_i = 1)$$

~~$\leq 2n - 2n (e^{-p}(1+$~~

$$\leq 2n - 2 \sum_{i=1}^{n} e^{-p} - p(1 - e^{-p}) + p e^{-p}$$

car $e^{-p} \geq 1 - p$
$\Leftrightarrow 1 - e^{-p} \leq p$

$$\leq 2n - 2n \left[e^{-p} - p + 2p e^{-p}\right] = 2n - 2n \left[e^{-p}(1 + 2p) - p\right]$$

$$\leq 2n - 2n \left[(1-p)(1+2p) - p\right]$$

$$= 2n \left[1 - 1 - 2p + p + 2p^2 + p\right] = 4np^2 = \frac{4\lambda^2}{n}$$

De l'intégration aux probas, Garet - Kurtzmann

COMPLÉMENT

- (*) en effet
$$\begin{cases} P(X=0) = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + p(1-e^{-p}) = e^{-p} = \dfrac{e^{-p} p^0}{0!} \\ P(X=1) = 0 + pe^{-p} = \dfrac{p^1 e^{-p}}{1!} \\ P(X=k) = \dfrac{p^k e^{-p}}{k!} \end{cases} \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(p)$$

$$\begin{cases} P(Y=0) = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + \sum_{k\geq 2} \dfrac{e^{-p} p^k}{k!} \\ \quad = e^{-p} - p(1-e^{-p}) + 1 - pe^{-p} - e^{-p} = 1-p \\ P(Y=1) = p(1-e^{-p}) + pe^{-p} = p \end{cases} \Rightarrow Y \sim \mathcal{B}(p)$$

- On a par $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$
$\lim_{n \to +\infty} P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ d'où la convergence, l'inégalité ne fait que préciser cette convergence.